Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Схема заполнения

Для билета

Для билета

Вариант задания 1

Лист работы 1 из 3

N 4

$P(x,y) = x^3 + 8y^3 - 3xy^2 - 6x^2y - x - 2y$

Докажем, что при $x \in \mathbb{Z}$ $y \in \mathbb{Z}$ $P(x,y) \vdots 3$.

$x^3 + 8y^3 - 3xy^2 - 6x^2y - x - 2y \equiv x^3 - x + 8y^3 - 2y =$

$= (x-1)\cdot x \cdot (x+1) + (2y-1)\cdot 2y(2y+1) \equiv 0 \pmod 3$, т.к

$(x-1), x, (x+1)$ - 3 последовательных целых числа.

Среди них хотя бы 1 делится на 3, т.е. их

произведение $(x-1)x(x+1) \vdots 3$.

Аналогично $(2y-1), 2y, (2y+1)$ - 3 послед. целых числа, т.е.

$(2y-1)\,2y(2y+1) \vdots 3$.

Тогда $(x-1)x(x+1) + (2y-1)2y(2y+1) \vdots 3$.

Значит, $P(x,y) \vdots 3 \quad \forall x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}$.

Теперь покажем, что любое $A \vdots 3$ мы можем

получить, поставив некоторые целые x y в $P(x,y)$.

$A \vdots 3 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z} : A = 3a$

$P(-a, -a) = -a^3 - 8a^3 + 3a \cdot a^2 + 6a^2 \cdot a + a + 2a = 3a = A$.

Таким образом, любое число, кратное 3, мы можем

получить, а любое, не кратное 3, не можем

Можно использовать оборот листа для записи решений

Тогда наименьшее значение до 10000000

$P(x,y)$ кратно $(\text{при } x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z})$ $\left[\frac{10000000}{3}\right] = 3333333$

Ответ: 3333333

№1.

У каждого мяча есть 2 состояния: обычное и накачанный

Назовём пару носков X ~~одинаковых~~, если они одного цвета и в 1 состоянии. Очевидно, что ~~одинаковых~~ пар X от 0 до 3

Перебрём каждое возможное число пар X и посчитаем для каждого кол-во вариантов надеть носки.

если ~~0~~ 3 пары X, то для каждой варианты чулки есть

$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{6!}{8}$ способов надеть их на 2 ноги 6 пар

порядке (6 мест, 3 пары одинак. объектов)

При этом таких вариаций $2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 8$, т.к

в каждой паре X есть по 2 состояния носок.

Тогда всего способов $\frac{6!}{8} \cdot 8 = 6!$

если 2 пары X, то для каждой вариации чулки есть

$\frac{6!}{2!\cdot 2!} = \frac{6!}{4}$ способа надеть носки (6 мест, 6 объектов,

2 пары из которых одинаковы)

Таких вариаций $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, т.к есть

3 ~~вида~~ способа выбрать ~~пар~~ чулки пары не X и

для каждого по $2 \cdot 2 = 4$ способа выбрать состояние

каждой из оставшихся пар.

Тогда всего способов $\frac{6!}{4} \cdot 12 = 6! \cdot 3$.

если 1 пара X, то для каждой вариации есть

$\frac{6!}{2!}$ способа надеть носки (6 мест, 6 объектов,

2 одинаковых объекта)

Таких вариаций $2 \cdot 3 = 6$, т.к. есть 3 способа выбрать пару для которого же X и для второй способа выбрать состояние для пары X

Всего способов $\frac{6!}{2} \cdot 6 = 3 \cdot 6!$

если нет пар X, т.е. в каждой однотипной паре робко посол напугана

Тогда все пары различны и общее число способов $6!$

Всего способов видеть покои $6! + 3 \cdot 6! + 3 \cdot 6! + 6! = 8 \cdot 6! =$

$= 8 \cdot 720 = 5760.$

Ответ: 5760

№5.

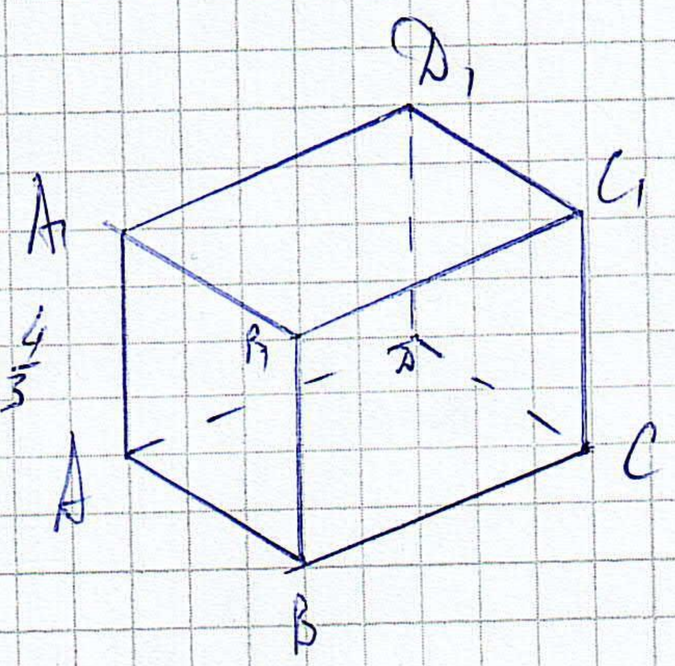
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямая призма

$ABCD$ - ромб

$\alpha: C_1 \in \alpha;\ \alpha \parallel BD;\ \angle(\alpha, (ABC)) = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$

$S_{сеч} : S_{ABCD} = 35 : 24$

Найти: $\angle(AC_1, (ABC))$



Решение:

1. Рассмотрим ортогональную проекцию сечения на $ABCD$.

$S_{пр^{-1}сеч} = S_{сеч} \cdot \cos(\alpha, (ABC))$

~~$S_{пр} =$~~ $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$

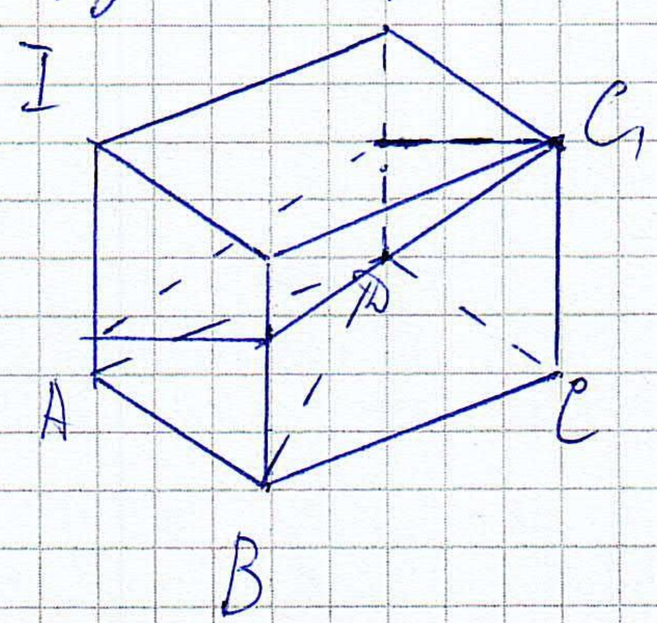
~~при $x \in (0; \frac{\pi}{2})$~~ $\cos x = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$

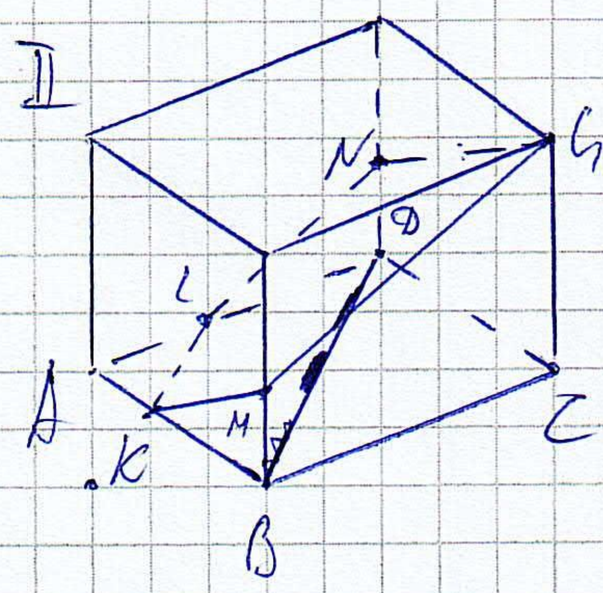
$\cos(\alpha, (ABC)) = \sqrt{\frac{1}{\frac{25}{9}}} = \frac{3}{5}$, тогда $S_{пр} = \frac{3}{5} S_{сеч}$

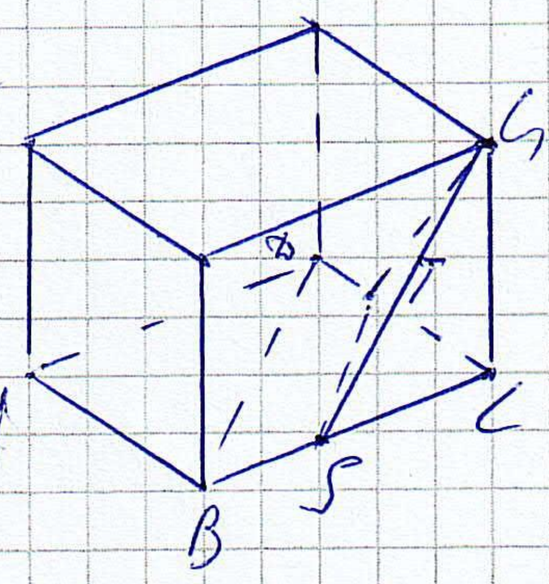
$S_{сеч.} = \frac{35}{24} S_{ABCD}$

$S_{пр.} = \frac{3}{5} \cdot \frac{35}{24} S_{ABCD} = \frac{7}{8} S_{ABCD}$.

Рассмотрим, какими могут быть сечения, проходящие через C_1, параллельное BD:







I $пр_{(ABC)}$ сечение $= ABCD$ $S_{пр} = \frac{7}{8} S_{ABCD}$ неверно

II $пр_{(ABC)}$ сеч. $= \Delta CST$ $S_{CST} \leq \frac{1}{2} S_{CBD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

$S_{CST} = \frac{2}{3} S_{ABCD}$ невозможно

Остается II: $пр_{(ABC)}$ сеч $=$ ~~KLMN~~ $KL\,DCB$

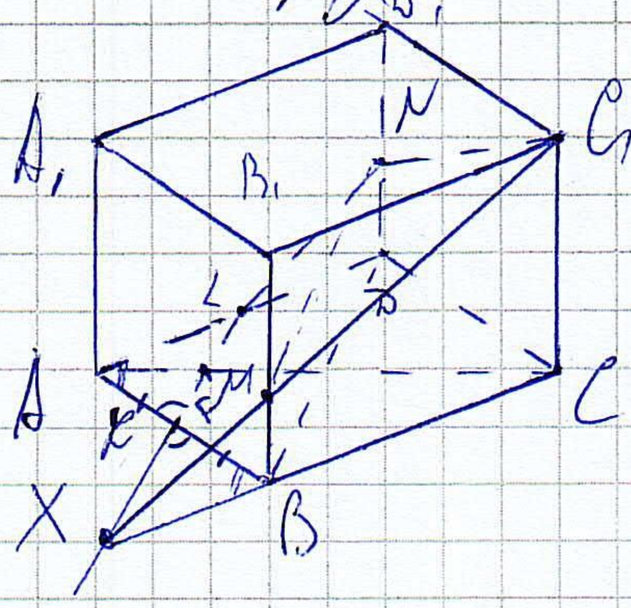
$S_{KLDCB} = \frac{7}{8} S_{ABCD}$

$KL \parallel BD$ ($\alpha \parallel BD$, $BD \subset (ABC)$, $(ABC) \cap \alpha = KL$) $\Rightarrow KL \parallel BD$

$S_{ALK} = \frac{1}{8} S_{ABCD} = \frac{1}{4} S_{ABD}$

($S_{ALK} = \frac{1}{4} S_{ABD}$; $KL \parallel BD$) $\Leftrightarrow KL$ – ср. линия $\triangle ABD$, т.е.

K – середина AB; L – середина AD;



$AB = a$

$KL \cap BC = X$ $\quad X \in (BCC_1)$; $X \in \alpha$; $C_1X = \alpha \cap BCC_1$

$C_1X \cap BB_1 = M$ $\quad M \in \alpha$, $M \in (BCC_1)$

$[C_1M] = \alpha \cap BB_1C_1C$.

$\triangle AKL = \triangle BKX$ по стороне и 2 прил. к ней углам. $BX = AL = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$

$CX = BX + BC = \frac{3}{2} a$

В $\triangle BB_1D_1D$: $MN \parallel BD$ $\quad N \in DD_1$. $KLNC_1M$ – искомое сечение

$AC \cap KL = F$.

$(AC \perp BA,\ BA \cap KL) \Rightarrow AC \perp (BKL)$, т.е. $CF \perp KL$

$(AC \perp KL,\ FAC = np_{(ABC)} FA_1) \Rightarrow A_1F \perp KL$ по ~~т. т. п.~~ теореме о 3 перпендикулярах.

$\angle((A_1ABC)) = \angle(A_1F, FC) = \angle A_1FC$, т.к. $\angle A_1FC$ – линейный угол $\angle A_1(KL)C$.

$tg((A_1ABC)) = tg\, A_1FC = \frac{4}{3}$.

$\triangle A_1FC$: $CA_1 = CF \cdot tg\, A_1FC = \frac{4}{3} CF$ (1)

$(\angle A_1CF = 90°$, т.к. $CA_1 \perp (ABC)) \Rightarrow CA_1 \perp CF$.

$ABCD$: $CF = \frac{3}{4} AC$, т.е. $AC = \frac{4}{3} CF$. (2)

$((1), (2)) \Rightarrow AC = CA_1$

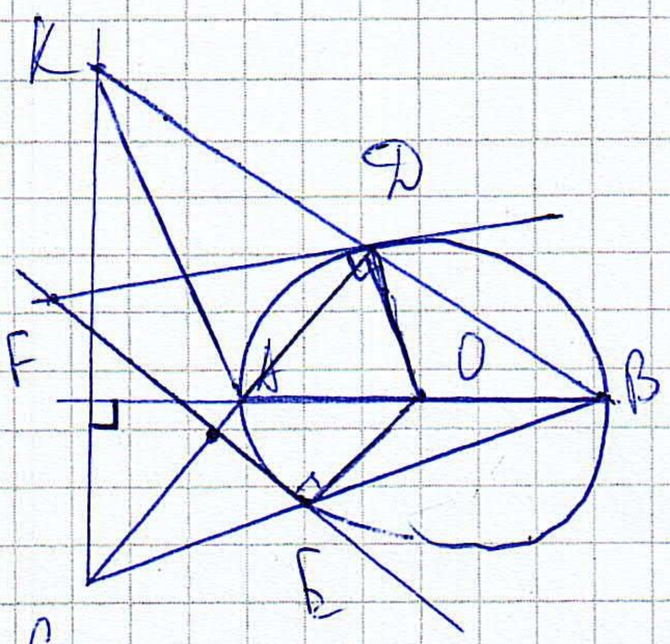
$\triangle ACA_1$: $\angle ACA_1 = 90°$ $AC = CA_1$

$\angle A_1AC = 45°$

$\angle((AA_1(ABC)) = \angle(AA_1, np_{(ABC)} AA_1) = \angle A_1AC = 45°$

Ответ: $\angle((AA_1(ABC)) = 45°$.

N3.



1. $FD = FE = 6$

~~$FO^2 - Or^2 = 6^2$, т.е. окружность с~~

~~$pow_F = 6$~~ pow_F - ст. ~~точки~~ F

$FO^2 - OD^2 = FD^2$

$FO = \sqrt{r^2 + 36}$.

2. $FEOD$ вписанный, т.к. $\angle ODF + \angle OEF = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

Тогда $FO \cdot DE = FD \cdot OE + OD \cdot FE$

$DE = \frac{12r}{\sqrt{r^2+36}}$

$\triangle BDE$: $2r = \frac{DE}{2\sin EBD} = \frac{\frac{12r}{\sqrt{r^2+36}}}{2 \cdot 0{,}6}$

$1 = \frac{10}{\sqrt{r^2+36}}$

$r^2 = 64 \qquad r = 8$

Тогда $AB = 2r = 16$

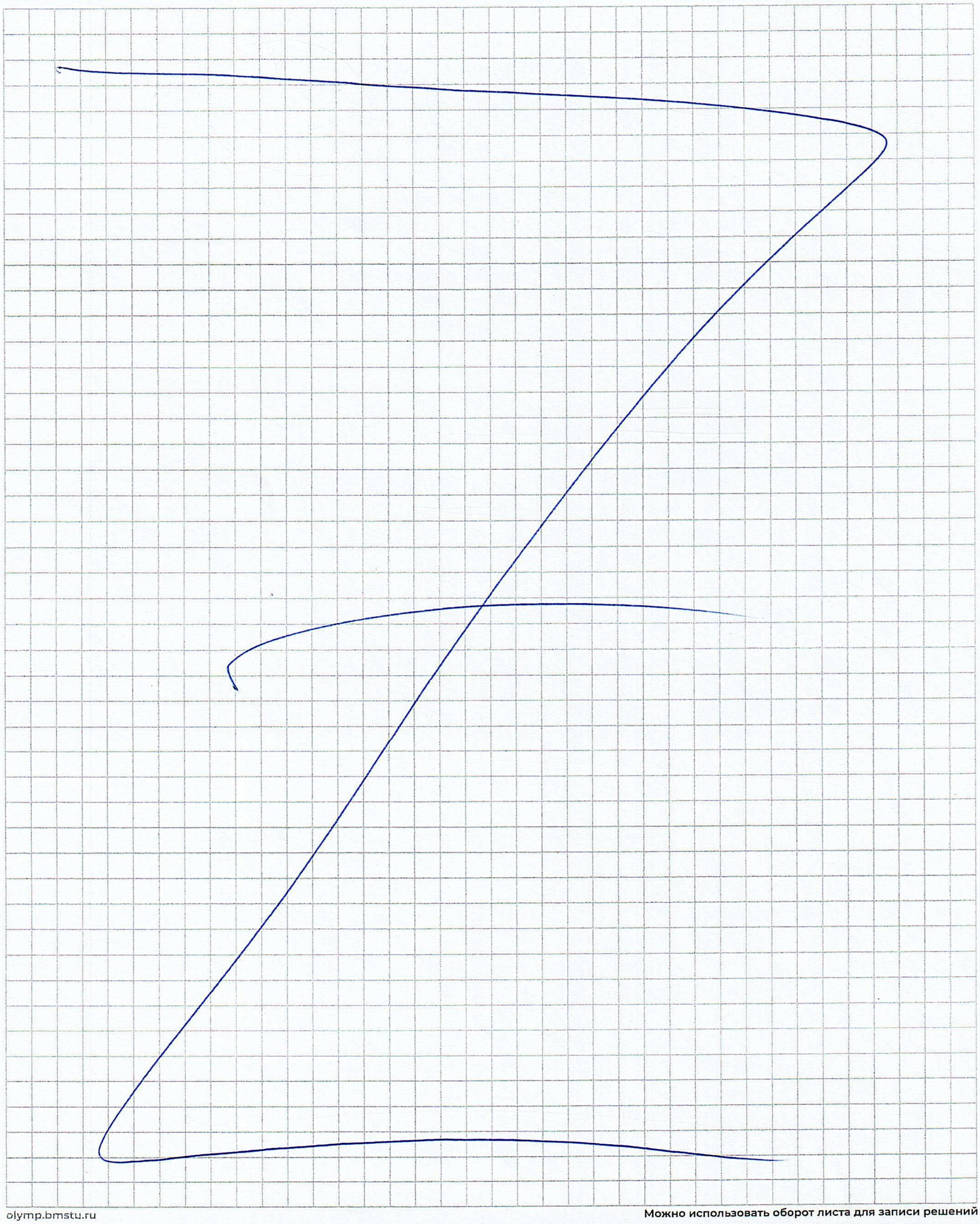
На этом моём решение заканчивается

Думаю, $A \in KE$, тогда $\sin KAL = \sin DAE = \sin CBD = 0{,}6$

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания _____



Можно использовать оборот листа для записи решений

